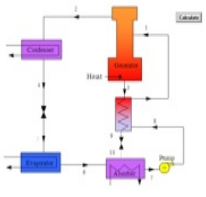
مجموعه فرمول های

مکانیک سیالات

مهندسی مکانیک تاسیسات , انرژی , پایپینگ



راهنمای استفاده:

مهندسی مکانیک و هوافضا : **همه فصول به جز فصل** 10

مهندسی عمران و معدن : **فصول** 1 **تا** 5

مهندسی شیمی، مهندسی بیوتکنولوژی، مهندسی فراوری و انتقال گاز و مهندسی پلیمر:

کلیه فصول به جز فصل 8

فصل 1

خواص سیال

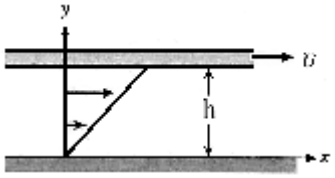
1-2- قانون لزجت نیوتن

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \qquad (1)$$

$\frac{du}{dy}$: گرادیان سرعت (آهنگ کرنش برشی یا تغییر شکل زاویه‌ای)

μ : لزجت (لزجت مطلق یا لزجت دینامیک)

توزیع سرعت خطی :



$$\tau_{yx} = \mu \frac{U}{h}$$

1-4- لزجت سینماتیک

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (2)$$

1-5- واحد لزجت

$1\,\text{Poise} = 0/1\,\text{kg/m.s}$ یا Pa.s

$1\,\text{cp} = 10^{-3}\,\text{Pa.s}$ (سانتی‌پویز)

$1\,\text{St} = 10^{-4}\,\text{m}^2/\text{s}$

11-7- سیالات غیرنیوتنی

$$\tau = k\left(\frac{du}{dy}\right)^n + \tau_0 \qquad (3)$$

سیال نیوتنی: $n = 1\ ,\ \tau_0 = 0$

سیال بینگهام: $n = 1\ ,\ \tau_0 \neq 0$

سیال دیلاتانت: $n > 1\ ,\ \tau_0 = 0$

سیال شبه پلاستیک: $n < 1\ ,\ \tau_0 = 0$

1-8- چگالی و وزن مخصوص

$$\text{چگالی}: \rho = \frac{m}{V} \qquad (5)$$

$$\text{وزن مخصوص}: \gamma = \rho g = \frac{W}{V} \qquad (6)$$

1-9- حجم مخصوص

$$\nu = \frac{1}{\rho} \qquad (7)$$

1-10- چگالی نسبی

$$S.G = \frac{\text{چگالی سیال}}{\text{چگالی سیال مبنا}} = \frac{\text{وزن مخصوص سیال}}{\text{وزن مخصوص سیال مبنا}} \qquad (8)$$

1-11- کشش سطحی

$$\sigma = \frac{F}{L} \qquad (9)$$

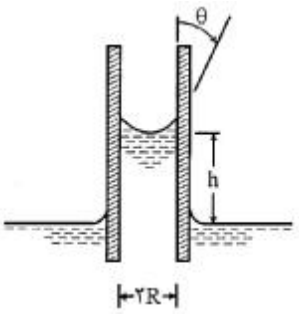
اختلاف فشار داخل و بیرون $\Delta P = P_i - P_o$:

قطره کروی: $\Delta P = \frac{2\sigma}{R}$

جت استوانه‌ای: $\Delta P = \frac{\sigma}{R}$

حباب کروی: $\Delta P = \frac{4\sigma}{R}$

1-12- مویینگی



میزان صعود یا نزول مایع در پدیده مویینگی:

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\gamma x}$$

لوله‌ای به شعاع R : $x = R$

دو صفحه موازی به فاصله d : $x = d$

لوله هم محور به شعاع‌های R_1 و R_2 : $x = R_o - R_i$

1-13- مدول کشسانی حجمی

$$E_v = -\frac{dP}{dV/V} \qquad (10)$$

$$E_v = \frac{dP}{d\gamma/\gamma} = \frac{dP}{d\rho/\rho} \qquad (11)$$

در فرایند دما ثابت:

$$E_v = P$$

در فرایند ایزنتروپیک:

$$E_v = kP$$

فصل 2

استاتیک سیالات

بخش اول: فشار و روش‌های اندازه‌گیری آن

2-1- فشار

قانون پاسکال:

$$P_x = P_y = P_z$$

هرگاه سیال ساکن نبوده و لایه‌های آن نسبت به هم حرکت داشته باشند:

$$P = \frac{1}{3}(P_x + P_y + P_z) \quad (1)$$

2-2- تغییرات فشار

نیروی سطحی در واحد حجم ناشی از تغییر فشار:

$$\mathbf{f} = -\nabla P \quad (2)$$

یا

$$\mathbf{f} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{k}\right) \quad (3)$$

معادله اساسی استاتیک سیالات

$$\frac{dP}{dz} = -\gamma \quad (4)$$

حالت اول: $\rho = \rho(p)$

$$\int_{P_1}^{P} \frac{dP}{\rho} = -g(z_2 - z_1) \quad (5)$$

حالت دوم: $\gamma = \gamma(z)$

$$\Delta P = -\int_{z_1}^{z_2} \gamma dz$$

حالت سوم: $\rho = cte$

$$P = P_0 + \gamma h \quad (6)$$

حالت دما ثابت:

با فرض گاز ایده‌آل :

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{\gamma_0}{P_0}(z - z_0)\right] \quad (7)$$

یا

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{g(z - z_0)}{RT_0}\right] \quad (8)$$

حالت آدیاباتیک:

$$P = P_0\left[1 - \frac{n-1}{n}\frac{\gamma_0(z - z_0)}{P_0}\right]^{\frac{n}{n-1}} \quad (9)$$

$$T = T_0\left[1 - \frac{n-1}{n}\frac{\gamma_0(z - z_0)}{P_0}\right] \quad (10)$$

2-3- اندازه‌گیری فشار

$$P = 1atm = 101325Pa = 14/7Psi = 10/33mH_2O = 760mmHg = 1/01325bar$$

$$P_{abs} = P_{gage} + P_{bar} \quad (12)$$

(فشار اتمسفری + فشار نسبی = فشار مطلق)

فشار نسبی - = خلأ نسبی

بخش دوم : نیروهای هیدروستاتیکی وارد بر سطوح

2-5- نیروی هیدروستاتیکی وارد بر صفحه تخت

2-5-1- روش انتگرال‌گیری

$$F = \int_A PdA \quad (15)$$

مختصات نقطه اثر :

$$x_p = \frac{1}{F}\int_A xPdA \quad (16)$$

$$y_p = \frac{1}{F}\int_A yPdA \quad (17)$$

2-5-2- روش استفاده از روابط

$$F = P_C A \text{ یا } F = \gamma \bar{h} A \quad (18)$$

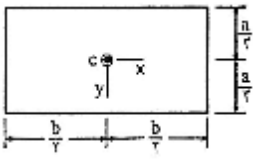
$$x_p = \bar{x} + \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A} \quad (19)$$

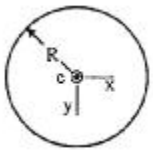
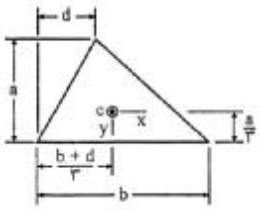
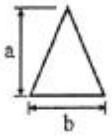
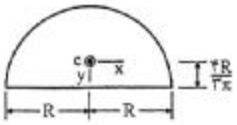
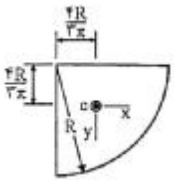
$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} \quad (20)$$

$\bar{h} = \bar{y}\sin\theta$

$\bar{h}$: **مقدار فاصله قایم مرکز سطح صفحه تا سطح آزاد آب**

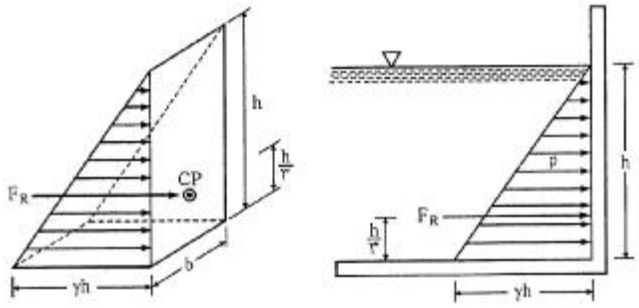
$\bar{I}_{xy}$: **حاصل‌ضرب اینرسی** I_G : **گشتاور دوم سطح**

شکل		A	$\bar{I}_{xy}$	I_G
مستطیل		ab	0	$\frac{1}{12}ba^3$

دایره		πR^2	0	$\frac{\pi R^4}{4}$
مثلث (کلی)		$\frac{1}{2}ab$	$\frac{1}{72}ba^2(b-2d)$	$\frac{1}{36}ba^3$
مثلث متساوی‌الساقین		$\frac{1}{2}ab$	0	$\frac{1}{36}ba^3$
نیم‌دایره		$\frac{1}{2}\pi R^2$	0	$0/10976R^4$
ربع دایره		$\frac{1}{4}\pi R^2$	$-0/01647R^4$	$0/05488R^4$

2-5-3- روش منشور فشار

منشور فشار برای یک سطح مستطیلی قایم



$$F_R = V = \frac{1}{2}(\gamma h)(bh) = \gamma\left(\frac{h}{2}\right)A \qquad (21)$$

$$x_P = \frac{1}{V}\int_V x dV \qquad (22)$$

$$y_P = \frac{1}{V}\int_V y dV \qquad (23)$$

2-6- نیروهای هیدروستاتیک وارد بر سطوح خمیده

مؤلفه افقی:

$$F_H = P_c A = \gamma \bar{h} A \qquad (26)$$

مؤلفه قائم:

$$F_v = \gamma V \qquad (27)$$

$\bar{h}$ **فاصله قائم مرکز سطح از سطح تصویر شده تا سطح آزاد سیال و A مساحت این سطح**

برآیند نیروهای افقی و قائم ذکر شده:

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} \qquad (28)$$

$$\tan\alpha = \frac{F_V}{F_H} \qquad (29)$$

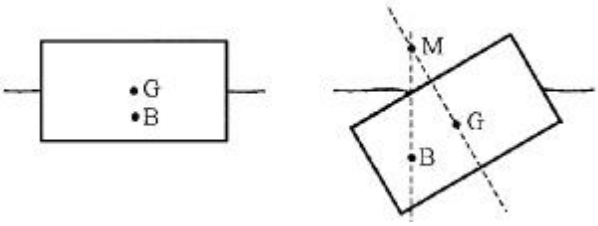
که α **زاویه نیروی برآیند با سطح افق است.**

2-7- نیروی شناوری

$$F'_B = \gamma_f V'_s$$

V'_s حجمی از جسم که داخل سیال است

2-8- ارتفاع متاسانتریک



M : نقطه متاسانتریک

$\overline{MG}$: ارتفاع متاسانتریک

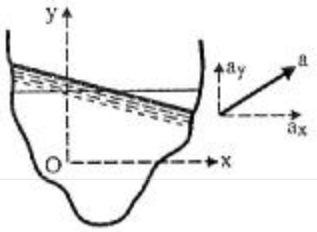
$$\overline{MG} = \overline{MB} - \overline{GB} = \frac{I}{V} - \overline{GB} \qquad (32)$$

I: ممان اینرسی سطح (گشتاور دوم سطح) حول محور y

V: کل حجم مایع جابه‌جا شده

بخش سوم : حرکت صلب‌گونه سیالات

2-9- حرکت با شتاب خطی ثابت



معادله تغییرات فشار:

$$P = P_0 - \rho a_x x - \rho(g + a_y) y \qquad (33)$$

زاویه سطح آزاد با سطح افق :

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g + a_y} \quad (34)$$

شتاب کلی حرکت:

$$a = \left[a_x^2 + (a_y + g)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

اگر s جهت عمود بر سطح آزاد سیال باشد:

$$\frac{dP}{ds} = \rho a \quad (36)$$

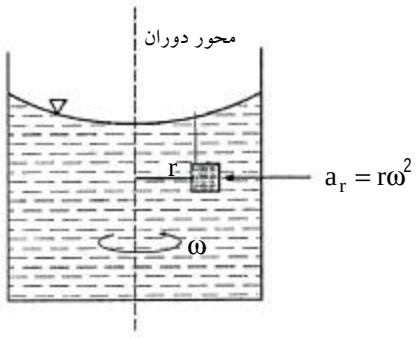
اگر مخزن حاوی سیالی با شتاب ثابت a_y به سمت بالا حرکت کند فشار در فاصله قائم h از سطح آزاد سیال عبارت خواهد بود از:

$$P = \gamma' h \quad (37)$$

$$\gamma' = \gamma\left(1 + \frac{a_y}{g}\right)$$

اگر مخزن دارای شتاب رو به پایین باشد علامت + به – تبدیل می‌شود.

2-10- حرکت چرخشی یکنواخت



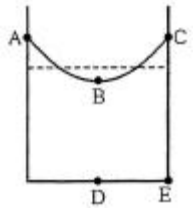
معادله تغییرات فشار:

$$P = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2g} - \gamma z + c \quad (38)$$

معادله سطح فشار ثابت

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + c \quad (39)$$

$$r_B = 0 \ , \ r_C = R \ \Rightarrow \ z_C - z_B = h = \frac{R^2\omega^2}{2g} \tag{40}$$



فصل 3

دینامیک سیالات غیرلزج

جریان درهم:

$$\tau = (\mu + \eta)\frac{du}{dy} \quad (1)$$

η :لزجت گردابی

3-2- سرعت و شتاب

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \quad (2)$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \quad (3)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \quad (4)$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (5)$$

جمله اول : شتاب موضعی سه جمله باقی‌مانده : شتاب جابه‌جایی.

$$\mathbf{a}_{local} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\mathbf{a}_{conv} = u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \quad (7)$$

3-3- دبی حجمی و دبی جرمی

دبی حجمی سیال:

$$Q = \int_A \mathbf{V}.d\mathbf{A} = AV_{av} \quad (8)$$

سرعت متوسط:

$$V_{av} = \frac{Q}{A} = \frac{\int_A \mathbf{V}.d\mathbf{A}}{A} \quad (9)$$

دبی جرمی

$$\dot{m} = \int_A \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} \quad (10)$$

اگر ρ ثابت باشد:

$$\dot{m} = \rho\int_A \mathbf{V}.d\mathbf{A} = \rho Q \quad (11)$$

بخش دوم: تجزیه و تحلیل انتگرالی

5-3- معادله پیوستگی

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \rho d\forall + \int_{c.s} \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} = 0 \quad (13)$$

1- جریان پایا

$$\sum \dot{m}_{out} - \sum \dot{m}_{in} = 0 \quad \text{یا} \quad \sum \dot{m}_{in} = \sum \dot{m}_{out} \quad (14)$$

برای جریان داخلی یک لوله:

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \quad \text{یا} \quad \rho AV = cte \quad (15)$$

2- سیال تراکم‌ناپذیر و جریان پایا

$$\sum Q_{out} - \sum Q_{in} = 0 \quad \text{یا} \quad \sum Q_{in} = \sum Q_{out} \quad (16)$$

برای جریان داخلی یک لوله:

$$A_1V_1 = A_2V_2 \quad \text{یا} \quad AV = cte \tag{17}$$

3-6- معادله اندازه حرکت خطی

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \mathbf{V}\rho d\forall + \int_{c.s} \mathbf{V}\rho \mathbf{V}.dA \tag{18}$$

برای جریان پایا :

$$\sum \mathbf{F} = \int_{c.s} \mathbf{V}\rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} \tag{19}$$

در حالتی که جریان پایا، یک بعدی و سرعت‌ها برحسب مقدار متوسط بیان شوند داریم:

$$\sum \mathbf{F} = \left(\sum \rho Q\mathbf{V}\right)_{out} - \left(\sum \rho Q\mathbf{V}\right)_{in} \tag{20}$$

در سه بعد:

$$\begin{cases} \sum F_x = \left(\sum \rho Q V_x\right)_{out} - \left(\sum \rho Q V_x\right)_{in} \\ \sum F_y = \left(\sum \rho Q V_y\right)_{out} - \left(\sum \rho Q V_y\right)_{in} \\ \sum F_z = \left(\sum \rho Q V_z\right)_{out} - \left(\sum \rho Q V_z\right)_{in} \end{cases}$$

درحالتی که یک ورودی و یک خروجی داشته باشیم:

$$\sum \mathbf{F} = \rho Q(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) = \dot{m}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \tag{21}$$

بخش سوم: تجزیه و تحلیل دیفرانسیلی جریان سیال

3-7- معادله پیوستگی

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{یا} \quad \nabla \cdot \rho\mathbf{V} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{22}$$

$$\rho = cte: \ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{یا} \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{23}$$

$$\text{حالت پایا}: \ \nabla \cdot \rho\mathbf{V} = 0 \tag{24}$$

یا

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \qquad (25)$$

معادله پیوستگی در مختصات استوانه‌ای:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=-\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (26)$$

3-8- خطوط سیالاتی

خط جریان

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w} \qquad (27)$$

که u و v و w مؤلفه‌های بردار سرعت در جهات x ، y و z هستند.

3-9- تابع جریان

برای جریان تراکم‌ناپذیر دوبعدی در صفحه xy :

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}\ ,\quad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (29)$$

رابطه بین دبی جریان با تابع جریان:

$$Q=\psi_2-\psi_1 \qquad (30)$$

برای جریان تراکم‌پذیر:

$$\rho u=\frac{\partial \psi}{\partial y}\ ,\quad \rho v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (31)$$

$$\dot{m}=\psi_2-\psi_1 \qquad (32)$$

3-10- معادله اندازه حرکت

برای جریان تراکم‌ناپذیر با لزجت ثابت:

جهت x :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (33)$$

جهت y :

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (34)$$

جهت z :

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (35)$$

جریان غیرلزج $(\mu=0)$:

معادله اولر : $\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{g}-\nabla P$ (39)

3-11- معادله برنولی

$$\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=cte \quad (40)$$

یا

$$\frac{P}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z=cte \quad (41)$$

یا

$$P+\frac{1}{2}\rho V^2+\gamma z=cte \quad (42)$$

هد کل:

$$H=\frac{P}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z \quad (43)$$

3-12- ضریب تصحیح انرژی جنبشی

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{\nu}{V}\right)^3 dA \qquad (44)$$

V سرعت متوسط در هر مقطع و ν توزیع سرعت

3-13- ضریب تصحیح اندازه حرکت

$$\beta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{\nu}{V}\right)^2 dA \qquad (45)$$

3-14- توان

$$P = \gamma Q h \qquad (49)$$

γ : وزن مخصوص سیال، Q : دبی حجمی و h : ارتفاع معادل انرژی

توان موجود در یک جت سیال:

$$P = \gamma Q \frac{V_j^2}{2g} = \gamma A V_j \frac{V_j^2}{2g} = \frac{1}{2}\rho A_j V_j^3$$

فصل 4

آنالیز ابعادی و تشابه

4-1- ابعاد

ابعاد برخی از کمیت‌های مهم در مکانیک سیالات

کمیت	نشانه	بعد در MLTθ	بعد در FLTθ
طول	L	L	L
سطح	A	L^2	L^2
حجم	∀	L^3	L^3
سرعت	V	LT^{-1}	LT^{-1}
شتاب	a	LT^{-2}	LT^{-2}
دبی حجمی	Q	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
دبی جرمی	$\dot{m}$	MT^{-1}	FTL^{-1}
چگالی	ρ	MT^{-3}	FT^2L^{-4}
وزن مخصوص	γ	$ML^{-2}T^{-2}$	FL^{-3}
فشار و تنش	P,σ	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}
لزجت	μ	$ML^{-1}T^{-1}$	FTL^{-2}
لزجت سینماتیک	ν	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}

کمیت	نشانه	بعد در MLTθ	بعد در FLTθ
کشش سطحی	σ	MT^{-2}	FL^{-1}
سرعت زاویه‌ای	ω	T^{-1}	T^{-1}
گشتاور	T	ML^2T^{-2}	FL
توان	P	ML^2T^{-1}	FLT^{-1}
کار و انرژی	W, E	ML^2T^{-2}	FL

4-2- قضیه پی باکینگهام

تعداد متغیر : n
تعداد ابعاد : m
$\Rightarrow$ تعداد اعداد بی‌بعد $= n - m$

4-4- اعداد بی‌بعد

عدد رینولدز : $Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی لزجی}}$ (1)

عدد فرود : $Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی وزن}}$ (2)

عدد اویلر : $Eu = \frac{\Delta P}{\rho V^2} = \frac{\text{نیروی فشاری}}{\text{نیروی اینرسی}}$ (3)

عدد ماخ : $M = \frac{V}{C} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی تراکم‌پذیری}}$ (4)

(**C سرعت صوت است.**)

عدد وبر : $We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی کشش سطحی}}$ (5)

عدد استروهال : $St = \frac{L\omega}{V} = \frac{\text{نیروی سانتریفوز}}{\text{نیروی اینرسی}}$ (6)

فصل 5

جریان‌های داخلی تراکم‌ناپذیر و لزج

5-1- جریان در داخل لوله‌ها

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\nu} \qquad (1)$$

V: سرعت متوسط جریان، d قطر لوله، μ: لزجت سیال، ν: لزجت سینماتیک سیال

طول ناحیه ورودی (L):

$$\text{جریان آرام}: \frac{L}{d} = 0/06\,Re \qquad (2)$$

$$\text{جریان درهم}: 10 \le \frac{L}{d} \le 60 \quad \text{یا} \quad \frac{L}{d} = 4/4\,Re^{\frac{1}{6}} \qquad (3)$$

جریان آرام داخل لوله‌ها

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rx}) = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} r = 0 \;:\; \dfrac{du}{dx} = 0 \\ r = R \;:\; u = 0 \end{cases}$$

$$u = -\frac{R^2}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\frac{dP}{dx} \qquad (5)$$

$$u_{max} = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dP}{dx} \qquad (6)$$

$$\frac{u}{u_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (7)$$

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{2} u_{max} \quad (8)$$

$$\alpha = 2 \ , \ \beta = \frac{4}{3}$$

معادله هاگن – پوازی

$$\Delta P = \frac{128 \mu L Q}{\pi d^4} \quad (9)$$

$$\Delta P = \frac{32 \mu L u}{d^2} \quad (10)$$

تنش برشی:

$$\tau_{rx} = -\mu \frac{du}{dr} = -\frac{r}{2} \frac{dP}{dx} \quad (11)$$

جریان، کاملاً توسعه یافته:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L} = -\frac{\Delta P}{L} \quad (12)$$

تنش برشی روی دیواره لوله:

$$\tau_w = \tau\big|_{r=R} = \frac{R}{2} \frac{\Delta P}{L} \quad (13)$$

و در نتیجه:

$$\frac{\tau_w}{\tau} = \frac{R}{r} \quad \text{یا} \quad \tau = \frac{\tau_w}{R} r \quad (14)$$

برای یک لوله با زاویه θ نسبت به افق قرار داشته باشد که فشار دو انتهای آن برابر باشد:

$$u = \frac{R^2 - r^2}{4\mu} \gamma \sin\theta \quad (15)$$

$$\tau_w = \frac{R}{2} \gamma \sin\theta \quad (16)$$

5-2- جریان آرام سیالات غیرنیوتنی در لوله‌ها

الف) سیالات بینگهام

$$\tau = \tau_y + \mu_P \frac{du}{dr}$$

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{\tau_w}{8\mu_p}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{\tau_y}{\tau_w}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\tau_y}{\tau_w}\right)^4\right] \quad (17)$$

ب) سیالات قانون توانی (Power law)

$$\tau = k\left(\frac{du}{dr}\right)^n$$

$$\frac{u}{\bar{u}} = \left(\frac{3n+1}{n+1}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right] \quad (18)$$

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{n}{3n+1}\left(\frac{\tau_w}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (19)$$

$$\Delta P = 2k\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n \frac{u^n L}{R^{n+1}} \quad (20)$$

5-3- تعیین افت اصطکاکی در لوله (معادله دارسی – ویسباخ)

برای جریان سیال تراکم‌ناپذیر، پایا و توسعه یافته :

$$h_f = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} \quad (21)$$

f: ضریب اصطکاک دارسی **L : طول لوله**

d: قطر لوله **V: سرعت متوسط جریان**

ضریب اصطکاک فانینگ

$$C_f = \frac{f}{4} \quad (22)$$

برای مجراهای غیردایره‌ای:

$$h_f = f\frac{L}{d_h}\frac{V^2}{2g} \quad (23)$$

d_h قطر هیدرولیکی مربوط به مجرا

5-4- ضریب اصطکاک

1- **جریان آرام**:

$$f = \frac{64}{Re} \quad (24)$$

2- **جریان درهم**:

معادله کلبورک:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0/869\ln\left[\frac{\varepsilon/d}{3/7} + \frac{2/523}{Re\sqrt{f}}\right] \quad (25)$$

(برای کنکور لازم نیست)

توجه: معادله بلازیوس برای لوله‌های صاف ($Re \le 10^5$):

$$f = \frac{0/3164}{Re^{0/25}} \quad (26)$$

رابطه بین ضریب اصطکاک و تنش برشی روی دیواره:

$$\tau_w = \frac{1}{8}f\rho V^2 \quad (28)$$

5-5- جریان درهم

زیر لایه لزج:.

$$\delta' = 5\frac{\nu}{u^*} : \text{ضخامت زیر لایه لزج} \quad (29)$$

$$u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} : \text{سرعت برشی با سرعت اصطکاکی} \quad (30)$$

لایه میانی:

توزیع سرعت: $\frac{u}{u^*} = 2/5 \ln \frac{yu^*}{\nu} + 5/5$ (32)

لایه خارجی:

توزیع سرعت : $\frac{u_m - u}{u^*} = 2/5 \ln \frac{R}{y}$ (33)

توزیع سرعت در جریان درهم :

$$\frac{u}{u_{max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{یا} \quad \frac{u}{u_{max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{34}$$

y فاصله از دیواره لوله: $y = R - r$

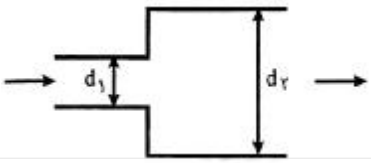
5-6- افت‌های موضعی

$$h_m = k \frac{V^2}{2g} \tag{35}$$

5-6-1- طول معادل

$$L_e = \frac{kd}{f} \tag{37}$$

5-6-2- تلفات ناشی از انبساط ناگهانی



$$h_e = k_e \frac{V_1^2}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} \tag{38}$$

$$k_e = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right]^2 \tag{39}$$

تخلیه جریان از یک مجرا به داخل مخزن بزرگ: $k_e = 1$

5-6-3- تلفات ناشی از انقباض ناگهانی

$$h_c = k_c \frac{V_2^2}{2g} \quad (40)$$

5-6-4- زانویی

تغییرات فشار در جهت شعاعی:

$$\frac{dP}{dr} = \rho \frac{V^2}{r} \Rightarrow P' - P = \rho V^2 \ln \frac{r'}{r}$$

5-7- معادله انرژی

$$\frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \sum h_f \quad (41)$$

$\sum h_f$: تلفات انرژی α_1 و α_2 : ضرایب تصحیح انرژی

5-9- جریان آرام کاملاً توسعه یافته بین صفحات موازی بزرگ

الف) صفحات ساکن باشند

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (42)$$

$$\begin{cases} y = 0 : \quad u = 0 \\ y = a : \quad u = 0 \end{cases}$$

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(y^2 - ay) \quad (43)$$

$$Q = -\frac{ba^3}{12\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \quad (44)$$

$$\bar{u} = -\frac{a^2}{12\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \quad (45)$$

$$u_{max} = \frac{3}{2}\bar{u} \qquad (46)$$

$$\tau_w = -\frac{a}{2}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (47)$$

$$f = \frac{48}{Re_a} \quad \left(Re_a = \frac{\rho u a}{\mu} \right) \qquad (48)$$

قطر هیدرولیکی برای دو صفحه موازی که به فاصله a از هم قرار دارند:

$$D_h = 2a$$

$$f = \frac{96}{Re_{D_h}} \qquad (49)$$

توجه: اگر مبدأ مختصات را روی محور لوله انتخاب کنیم به معادله زیر می‌رسیم:

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(y^2 - \frac{a^2}{4}\right) \qquad (50)$$

$$\tau_{yx} = a\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right) \qquad (51)$$

ب) صفحه بالایی با سرعت ثابت درحالت حرکت باشد

$$\begin{cases} y = 0 \ : \quad u = 0 \\ y = a \ : \quad u = U \end{cases}$$

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(y^2 - ay) + \frac{Uy}{a} \qquad (52)$$

$$\tau_{yx} = a\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right) + \mu\frac{U}{a} \qquad (53)$$

$$Q = -\frac{ba^3}{12\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{baU}{2} \qquad (54)$$

$$\bar{u} = -\frac{a^2}{12\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{U}{2} \quad (55)$$

نقطه‌ای که در آن سرعت ماکزیمم است:

$$y = \frac{a}{2} - \frac{\mu U}{a\frac{\partial P}{\partial x}} \quad (57)$$

5-10- جریان فیلم مایع از روی یك سطح شیب‌دار

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g \cos\beta \quad (58)$$

شرایط مرزی: $\begin{cases} x = 0 \ : \ \frac{du_x}{dx} = 0 \\ x = \delta \ : \ u_z = 0 \end{cases}$

$$u_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] \quad (59)$$

$$x = 0 \Rightarrow u_{z,max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu} \quad (60)$$

$$\bar{u}_z = \frac{2}{3} u_{z,max} \quad (61)$$

$$u_z = \frac{3}{2}\bar{V}_z\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] \quad (62)$$

5-11- مجاری غیردایره‌ای

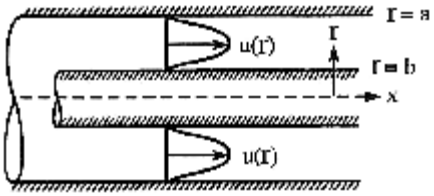
شعاع هیدرولیکی

$$R_h = \frac{A}{p} = \frac{\text{مساحت سطح مقطع}}{\text{محیط خیس‌شده}} \quad (63)$$

$$D_h = 4\frac{A}{p} = 4R_h \qquad (64)$$

$$h_f = f\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g} \qquad (65)$$

5-12- جریان از بین دو لوله هم‌محور



$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{dP}{dx} \qquad (66)$$

$$\begin{cases} r = a \;:\; u = 0 \\ r = b \;:\; u = 0 \end{cases}$$

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left[a^2 - r^2 + \frac{a^2 - b^2}{\ln(b/a)}\ln\frac{a}{r}\right] \qquad (67)$$

$$r_{u_{max}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2\ln(a/b)}} \qquad (68)$$

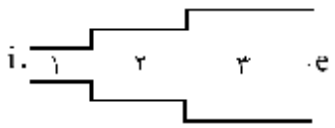
$$D_h = 2(a - b) \qquad (69)$$

5-14- سیستم‌های چندلوله‌ای

اتصال سری

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \mathbf{L} = Q_n \qquad (70)$$

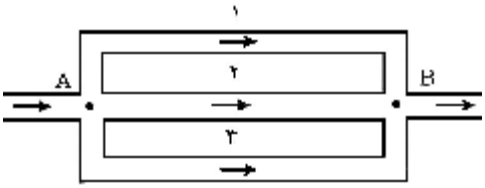
$$h_{f_{ie}} = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3} + \mathbf{L} + h_{f_n} \qquad (71)$$



اتصال موازی

$$h_{f_1} = h_{f_2} = h_{f_3} = \mathbf{L} = h_{f_n} = \frac{P_i}{\gamma} + z_i - \left(\frac{P_e}{\gamma} + z_e \right) \quad (73)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \mathbf{L} + Q_n \quad (74)$$



نسبت دبی‌ها در دو لوله موازی 1 و 2:

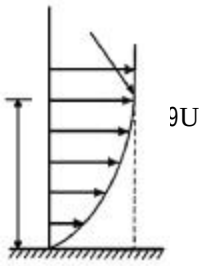
$$\frac{Q_1}{Q_1} = \sqrt{\frac{f_2}{f_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{d_1^5}{d_2^5}}$$

فصل 6

جریان‌های خارجی

6-1- مفاهیم لایه مرزی

$y=\delta:\quad u=0/99U$



ضخامت جابه‌جایی:

$$\delta^* = \int_0^{\infty}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy \approx \int_0^{\delta}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy \qquad (1)$$

ضخامت مومنتم:

$$\theta = \int_0^{\infty}\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy \approx \int_0^{\delta}\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy \qquad (2)$$

6-2- معادلات لایه مرزی

معادله پیوستگی: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ (3)

معادله اندازه حرکت در جهت x : $u\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (4)

معادله اندازه حرکت در جهت x : $\frac{\partial P}{\partial y}=0$

6-3- معادلات لایه مرزی در جریان روی صفحه تخت

الف) جریان آرام

معادله پیوستگی : $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ (5)

معادله اندازه حرکت در جهت x : $u\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (6)

شرایط مرزی:

$y=0 \;:\; u=0 \,,\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

$y=\delta \;:\; u=U \,,\; \frac{\partial u}{\partial y}=0$

6-4- حل بلازیوس

الف) جریان آرام

$$\delta=\frac{5x}{\sqrt{Re_x}} \quad (7)$$

$$C_f=\frac{0/664}{\sqrt{Re_x}} \quad (8)$$

$\frac{\theta}{\delta}=0/133$ و $\frac{\delta^*}{\delta}=0/344$

ب) جریان درهم

$$\delta=\frac{0/37x}{Re_x^{\frac{1}{5}}} \quad (9)$$

$$C_f = \frac{0/074}{Re_x^{\frac{1}{5}}} \quad (10)$$

6-5- روش انتگرالی ون کارمن برای حل معادلات لایه مرزی

در حالتی که فشار ثابت باشد:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u(U-u)dy = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (11)$$

که در آن: $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$

6-6- نیروهای پسا (دراگ) و برآ (لیفت)

$$F_D = C_D \frac{\rho U^2}{2} A \quad (14)$$

$$F_L = C_L \frac{\rho U^2}{2} A \quad (15)$$

U: سرعت جریان آزاد ρ : چگالی سیال

C_D : ضریب دراگ C_L : ضریب لیفت

6-6-1- نیروی دراگ

$$F_{D,P} = \int_A P dA = C_{D,P} \frac{\rho U^2}{2} A \quad (16)$$

$$F_{D,F} = \int_A \tau_w dA = C_{D,F} \frac{\rho U^2}{2} A \quad (17)$$

$F_{D,P}$: دراگ فشاری یا شکلی و $F_{D,F}$: دراگ اصطکاکی یا پوسته‌ای

برای صفحه تخت :

جریان آرام : $C_D = \frac{1/33}{\sqrt{Re_L}}$ (18)

جریان درهم : $C_D = \frac{0/074}{Re_L^{\frac{1}{5}}}$ (19)

6-6-2- نیروی لیفت

$$\text{ضریب لیفت}: C_L = \frac{F_L}{\frac{\rho U^2}{2} A} \quad (20)$$

6-7- جدایش

در نقطه جدایش:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0$$

6-9- قانون استوکس

نیروی دراگ : $F_D = 3\pi D\mu U$ (21)

ضریب دراگ : $C_D = \frac{24}{Re}$ (22)

سرعت حد

$U_t = \frac{gD_s^2}{18\mu}(\rho_s - \rho_f)$ یا $U_t = \frac{2}{9}\frac{ga_s^2}{\mu}(\rho_s - \rho_f)$ (23)

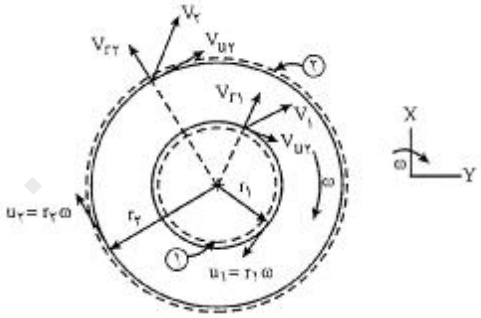
a_s : شعاع کره

فصل 7

توربوماشین‌ها

(توجه: از فرمول های (1) تا (10) در کنکور کارشناسی ارشد سوال مطرح نمی شود)

7-2- معادله اویلر برای توربوماشین‌ها



معادله اویلر:

$$T_{\text{محور}} = \dot{m}(r_2 V_{u_2} - r_1 V_{u_1}) \qquad (1)$$

T : گشتاور

V_{u_1} و V_{u_2} : مؤلفه‌های مماسی سرعت مطلق سیال گذرنده از سطح کنترل

توان توربوماشین:

$$\dot{W}_m = \omega T_{\text{محور}} = \omega \dot{m}(r_2 V_{u_2} - r_1 V_{u_1}) \quad (2)$$

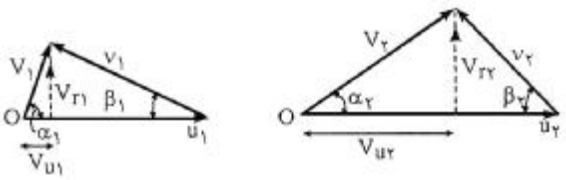
$$\dot{W}_m = \dot{m}(u_2 V_{u_2} - u_1 V_{u_1}) \quad (3)$$

u : سرعت مماسی روتور در شعاع r

هد توربوماشین در حالت جریان پایا و یکنواخت:

$$H = \frac{\dot{W}_m}{\dot{m}g} = \frac{1}{g}(u_2 V_{u_2} - u_1 V_{u_1}) \quad (4)$$

مثلث‌های سرعت اویلر و روابط مربوطه



خروجی ورودی

V : سرعت مطلق سیال

ν : سرعت نسبی سیال نسبت به پره

u : سرعت محیطی پره

V_u : مؤلفه مماسی سرعت مطلق سیال

V_r : مؤلفه سرعت مطلق سیال در امتداد عمود بر V_u

α : زاویه V با u

β : زاویه ν با $-u$

b : عرض پره

$$V_{u_1} = u_1 - V_{r_1}\cot\beta_1 \quad , \quad V_{u_2} = u_1 - V_{r_2}\cot\beta_2 \quad (5)$$

$$Q = 2\pi r_1 b_1 V_{r_1} = 2\pi r_2 b_2 V_{r_2} \quad (6)$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{V_{r_1}}{V_{u_1}} \quad , \quad \tan\alpha_2 = \frac{V_{r_2}}{V_{u_2}} \tag{7}$$

$$\frac{gH}{u_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}\left(1 - \frac{V_{r_1}}{u_1}\cot\beta_1\right) - \left(1 - \frac{V_{r_2}}{u_2}\cot\beta_2\right) \tag{8}$$

شرایط طراحی برای پمپ: $\alpha_1 = 90^0$ و در نتیجه: $V_{r_1} = V_1$ و $V_{u_1} = 0$

$$\left|\frac{Hg}{u_2^2}\right| = 1 - \frac{V_{r_2}}{u_2}\cot\beta_2 \tag{9}$$

شرایط طراحی برای توربین: $\alpha_2 = 90^0$ و در نتیجه: $V_{r_2} = V_2$ و $V_{u_2} = 0$

$$\left|\frac{Hg}{u_1^2}\right| = 1 - \frac{V_{r_1}}{u_1}\cot\beta_1 \tag{10}$$

رابطه بین H و Q برای یک پمپ:

$$H = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2 Q\cot\beta_2}{2\pi r_2 b_2 g}$$

3-7- راندمان توربوماشین‌ها

$$\text{توان هیدرولیکی}: \ P_f = \dot{m}\frac{\Delta P}{\rho} = \dot{m}gH = \rho gQH = \gamma QH \tag{11}$$

$$\text{توان مکانیکی}: \ P_m = T\omega \tag{12}$$

راندمان پمپ:

$$\eta_P = \frac{P_f}{P_m} = \frac{\gamma QH_P}{\omega T} \tag{13}$$

راندمان توربین:

$$\eta_T = \frac{P_m}{P_f} = \frac{\omega T}{\gamma QH_T} \tag{14}$$

7-4- آنالیز ابعادی و تشابه در توربوماشین‌ها

چهار گروه بی‌بعد حاصل شده عبارتند از:

$$R = \frac{\rho N D^2}{\mu} \qquad \text{عدد رینولدز} \qquad (15)$$

$$C_P = \frac{P}{\rho N^3 D^5} \qquad \text{ضریب توان} \qquad (16)$$

$$C_Q = \frac{Q}{N D^3} \qquad \text{ضریب دبی} \qquad (17)$$

$$C_H = \frac{gH}{N^2 D^2} \qquad \text{ضریب هد} \qquad (18)$$

با ترکیب گروه‌های بی‌بعد ذکر شده می‌توان به گروه بی‌بعد دیگر به نام راندمان دست یافت:

$$\frac{C_H C_Q}{C_P} = \frac{\gamma Q H}{P} = \eta_P \qquad (19)$$

$$\frac{C_P}{C_H C_Q} = \frac{P}{\gamma Q H} = \eta_T \qquad (20)$$

هرگاه دو پمپ 1 و 2 دارای تشابه هندسی باشند :

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{N_2}{N_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \qquad (21)$$

$$\frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \qquad (22)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^3\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 \qquad (23)$$

تغییرات راندمان را با اندازه:

$$\frac{1-\eta_2}{1-\eta_1}=\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (24)$$

7-5- کاویتاسیون

$$\sigma=\frac{P-P_v}{\rho V^2/2} \quad (25)$$

P : فشار مطلق در نقطه مربوطه P_v : فشار بخار مایع ρ : چگالی مایع V : سرعت مرجع

7-6- هد خالص مکش مثبت (NPSH)

$$NPSH=\frac{P_i}{\gamma}+\frac{V_i^2}{2g}-\frac{P_v}{\gamma} \quad (26)$$

اگر بخش ورودی پمپ در ارتفاع z_i و بالاتر از منبعی با سطح آزاد در فشار P_a باشد

$$NPSH_A=\frac{P_a-P_v}{\gamma}-z_i-h_L \quad (27)$$

h_L : تلفات حاصل بین منبع ورودی پمپ است.

برای دو پمپ دارای تشابه هندسی:

$$\frac{NPSH_2}{NPSH_1}=\frac{H_2}{H_1}=\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \quad (29)$$

7-8- اتصال موازی و سری پمپ‌ها

الف) اتصال موازی:

$$h_t=h_1=h_2 \quad (30)$$

$$Q_t=Q_1+Q_2 \quad (31)$$

ب) اتصال سری:

$$h_t=h_1+h_2 \quad (32)$$

$$Q_t=Q_1+Q_2 \quad (33)$$

7-9- سرعت ویژه

$$N_s = \frac{NQ^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{3}{4}}} \qquad (34)$$

فصل 8

جریان سیال ایده‌آل

8-1- جریان‌های چرخشی و غیرچرخشی

سرعت زاویه‌ای ω :

$$\omega = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad (1)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad (2)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (3)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (4)$$

$$\omega = \frac{1}{2}(\mathrm{curl}\,\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (5)$$

برای جریان غیرچرخشی سه بعدی:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \;,\; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \;,\; \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6)$$

شرط غیرچرخشی جریان دوبعدی:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (7)$$

چرخش:.

$$\xi=2\omega=\nabla\times\mathbf{V} \qquad (8)$$

8-2- پتانسیل سرعت

$$\mathbf{V}=\nabla\phi \qquad (9\text{-}12)$$

مختصات کارتزین (x,y,z) :

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}\ ,\quad v=\frac{\partial\phi}{\partial y}\ ,\quad w=\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad (10)$$

مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) :

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial r}\ ,\quad u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\ ,\quad u_z=\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad (11)$$

مختصات کروی (r,θ,Ψ) :

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}\ ,\quad u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\ ,\quad u_\Psi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\Psi} \qquad (12)$$

معادله لاپلاس:

$$\nabla^2\phi=0 \qquad (13)$$

شیب یک خط هم‌پتانسیل:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi=cte}=-\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y}=-\frac{u}{v} \qquad (14)$$

رابطه پتانسیل سرعت و تابع جریان

برای جریان دوبعدی، غیرچرخشی و تراکم‌ناپذیر:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\varphi=cte}=\frac{u}{v} \qquad (15)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi=cte}=-\frac{u}{v} \qquad (16)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\varphi=cte} = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi=cte}} \quad (17)$$

الف) مختصات کارتزین

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (19)$$

ب) مختصات استوانه‌ای

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \quad (20)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \quad (21)$$

ج) مختصات کروی

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = r^2\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (22)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \quad (23)$$

8-3- گردش

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{r} \quad (24)$$

یا به شکل زیر

$$\Gamma = \iint_S (curl\mathbf{V})_z\, ds \quad (25)$$

8-4- پتانسیل مختلط

برای جریان دوبعدی غیرچرخشی:

$$w(z) = \phi(x,y) + i\,\varphi(x,y) \quad (26)$$

$\phi(x,y)$ و $\varphi(x,y)$ توابع جریان و پتانسیل

$$\frac{dw}{dz} = u - iv \quad (27)$$

$$q = \overline{\frac{dw}{dz}} = u + iv \qquad (28)$$

q : سرعت مختلط

8-5- جریان‌های ساده

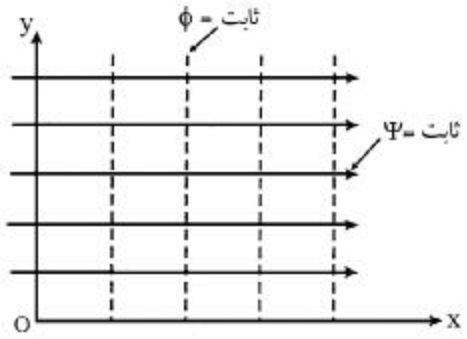
8-5-1- جریان یکنواخت

جریان یکنواخت با سرعت ثابت U و موازی محور xها

$$u = U \ , \ v = 0 \qquad (29)$$

$$\varphi = Uy \ , \ \phi = Ux \qquad (30)$$

$$w = \phi + i\varphi = Ux + iUy = U(x+iy) \ \Rightarrow \ w = Uz \qquad (31)$$

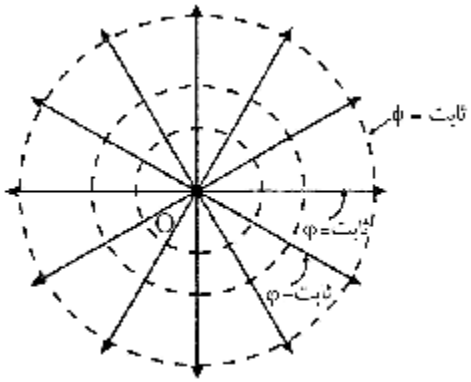


برای جریان یکنواخت با زاویه حمله θ نسبت به محور xها :

$$\varphi = U(y\cos\theta - x\sin\theta) \qquad (32)$$

$$\phi = U(x\cos\theta + y\sin\theta) \qquad (33)$$

8-5-2- چشمه و چاه



قدرت چشمه (Λ):

$$u_r = \frac{\Lambda}{2\pi r} \ , \ u_\theta = 0 \qquad (34)$$

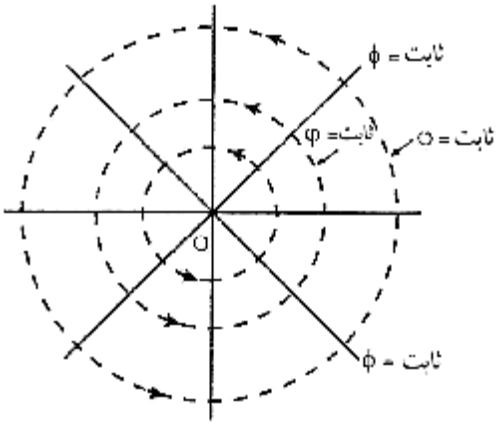
$$\varphi = \frac{\Lambda}{2\pi}\theta \qquad (35)$$

$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi}\ln r \qquad (36)$$

پتانسیل مختلط جریان چشمه :

$$w = \frac{\Lambda}{2\pi}\ln z \qquad (37)$$

8-5-3- گردابه



$$u_r = 0 \ , \ u_\theta = -\frac{\Lambda}{2\pi r} \tag{38}$$

$$\varphi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r \tag{39}$$

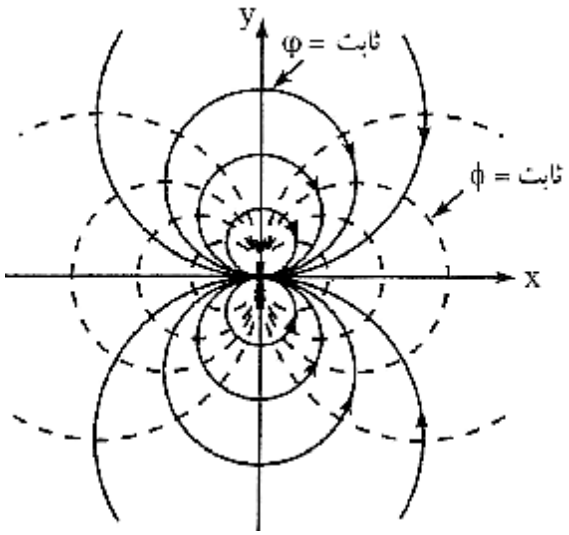
$$\phi = -\frac{\Lambda}{2\pi}\theta \tag{40}$$

Λ : قدرت گردابه

پتانسیل مختلط جریان گردابه:

$$W = \frac{i\Lambda}{2\pi} \ln z \tag{41}$$

8-5-4- جریان دوتایی *(Doublet)*



$$u_r = -\frac{\kappa}{r^2}\cos\theta \ , \ u_\theta = -\frac{\kappa}{r^2}\sin\theta \qquad (42)$$

$$\varphi = -\frac{\kappa\sin\theta}{r} \qquad (43)$$

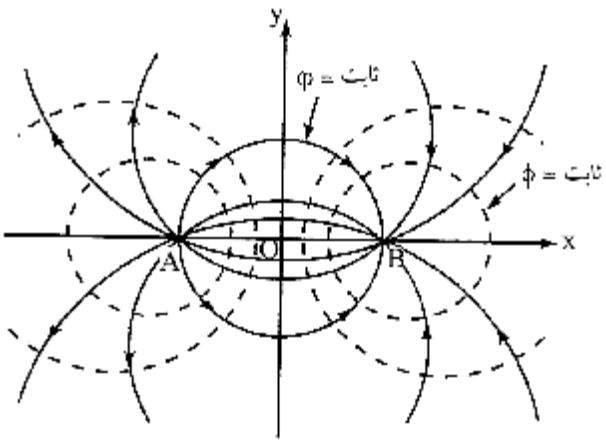
$$\phi = \frac{\kappa\cos\theta}{r} \qquad (44)$$

8-5-5- پتانسیل مختلط جریان دوتایی

$$w = \frac{k}{z} \qquad (45)$$

8-6- ترکیب جریان‌های ساده

8-6-1- ترکیب چشمه و چاه



$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\Lambda}{2\pi}\theta_1 - \frac{\Lambda}{2\pi}\theta_2 = \frac{\Lambda}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \quad (46)$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{\Lambda}{2\pi}\ln r_1 - \frac{\Lambda}{2\pi}\ln r_2 = \frac{\Lambda}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} \quad (47)$$

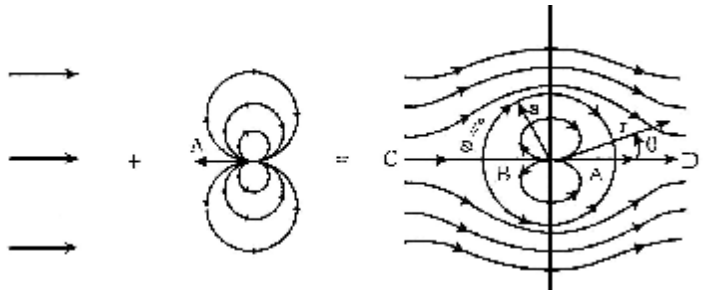
1: چشمه، 2: چاه

8-6-2- ترکیب جریان دوتایی و جریان یکنواخت (جریان حول استوانه)

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{\Lambda\sin\theta}{r} + Ur\sin\theta = Ur\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta \quad (48)$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r} + Ur\cos\theta = Ur\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \quad (49)$$

$$a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}} \quad (50)$$



جریان یکنواخت جریان دوتایی جریان حول استوانه

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \qquad (51)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta \qquad (52)$$

در روی سطح استوانه $(r = a)$:

$$u_r = 0 \ , \quad u_\theta = -2U\sin\theta \qquad (53)$$

$$P_s = P_0 + \frac{1}{2}\rho U^2(1-4\sin^2\theta)$$

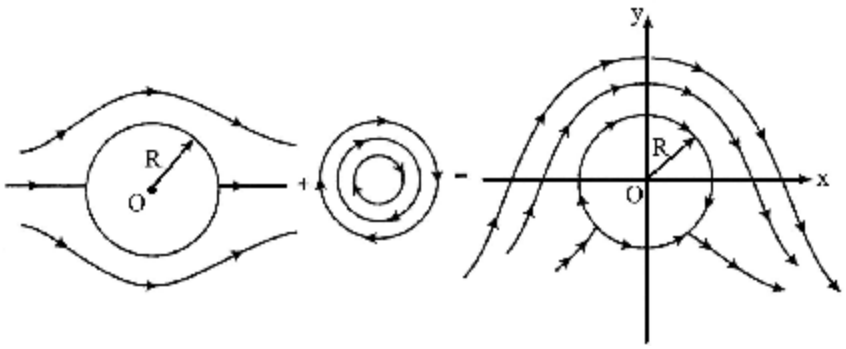
$$\text{ضریب فشار}: C_P = \frac{P_s - P_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1-4\sin^2\theta \qquad (54)$$

8-6-3- ترکیب جریان دوتایی و جریان یکنواخت و گردابه (جریان حول استوانه با گردش)

$$\varphi = Ur\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Lambda}{2\pi}\ln r \qquad (55)$$

$$\phi = Ur\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta - \frac{\Lambda}{2\pi}\theta \qquad (56)$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \qquad (57)$$



$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{\Lambda}{2\pi r} \qquad (58)$$

ضریب فشار:

$$C_P = \frac{P_s - P_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \left(-2\sin\theta - \frac{\Lambda}{2\pi a U}\right)^2 \qquad (59)$$

فصل 9

جریان‌های تراکم‌پذیر

9-1- مقدمه

سرعت صوت:

$$C^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = k\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \quad (1)$$

k : نسبت گرماهای ویژه سیال.

برای گاز ایده‌آل:

$$C = \sqrt{kRT} \quad (2)$$

☼ **نکته**: سرعت انتقال صوت در: گازها< مایعات < جامدات

براساس ضریب کشسانی حجمی:

$$C = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \quad (3)$$

عدد ماخ:

$$M = \frac{V}{C} \quad (4)$$

V : سرعت واقعی سیال یا سرعت یک جسم در سیال ساکن

C : سرعت صوت در همان سیال

9-2- فرایند ایزنتروپیك

9-2-1- مقدمه

اگر سیال گاز ایده‌آل باشد :

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (5)$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{k-1} \quad (6)$$

$$\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{k} \quad (7)$$

9-2-2- اثر تغییر سطح مقطع در جریان‌های ایزنتروپیك یك‌بعدی

$$\frac{dA}{A}=\frac{dV}{V}(M^2-1) \quad (8)$$

$$\frac{dP}{\rho V^2}(1-M^2)=\frac{dA}{A} \quad (9)$$

$$\frac{dT}{T}=\frac{(k-1)M^2}{1-M^2}\frac{dA}{A} \quad (10)$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{M^2}{1-M^2}\frac{dA}{A} \quad (11)$$

9-2-3- خواص سکون

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0 \quad (12)$$

برای گاز ایده‌آل:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2C_p} \quad (13)$$

9-2-4- روابط مربوط به جریان ایزنتروپیک گاز ایده‌آل

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)M^2 \quad (14)$$

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)M^2\right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (15)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)M^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (16)$$

روابط بین خواص بحرانی (خواص سیال در گلوگاه که $M = 1$ است) و خواص سکون :

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (17)$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (18)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (19)$$

9-3- حالت خفگی

$$\dot{m}_{max} \propto \frac{P_0 A^*}{\sqrt{T_0}}$$

9-6- جریان آدیاباتیك همراه با اصطكاك در یك كانال با مقطع یكنواخت

خاصیت	جریان مادون صوت	جریان مافوق صوت
سرعت V	افزایش می‌یابد	كاهش می‌یابد
عدد ماخ M	افزایش می‌یابد	كاهش می‌یابد
فشار P	كاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد
دما T	كاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد
چگالی ρ	كاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد
آنتالپی سكون h_0	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند
آنتروپی s	افزایش می‌یابد	افزایش می‌یابد

9-7- جریان همدما همراه با اصطكاك

$$\frac{f}{D}L_{max} = \frac{1-kM^2}{kM^2} + \ln(kM^2) \qquad (20)$$

خاصیت	$M < 1/\sqrt{k}$	$M > 1/\sqrt{k}$
فشار P	كاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد
چگالی ρ	كاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد
سرعت V	افزایش می‌یابد	كاهش می‌یابد
عدد ماخ M	افزایش می‌یابد	كاهش می‌یابد
دمای سكون T_0	افزایش می‌یابد	كاهش می‌یابد
فشار سكون P_0	كاهش می‌یابد	اگر $M < \sqrt{2}/(k+1)$ باشد افزایش می‌یابد اگر $M > \sqrt{2}/(k+1)$ باشد كاهش می‌یابد

فصل 10

جریان در بسترهای پرشده

10-1- تعاریف

ضریب تخلخل (ε):

$$\varepsilon = \frac{V_e}{V_t} \quad (1)$$

سطح ویژه (a_p):

برای پرکن‌های کروی:

$$a_p = \frac{6(1-\varepsilon)}{d_p} \quad (2)$$

d_p: قطر پرکن

شعاع هیدرولیکی:

$$r_H = \frac{\varepsilon}{a} \quad (3)$$

برای پرکن‌های کروی:

$$r_H = \frac{\varepsilon}{6(1-\varepsilon)} d_p \quad (4)$$

سرعت ظاهری و سرعت واقعی سیال:

$$V_s = \frac{Q}{A} \quad (5) \quad : \text{سرعت ظاهری}$$

$$V_b = \frac{V_s}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon A} \quad : \text{سرعت واقعی} \qquad (6)$$

A : سطح مقطع برج خالی

Q : دبی حجمی سیال در بستر خالی

ضریب شکل:

$$a = \frac{6(1-\varepsilon)}{\phi_s d_p} \qquad (7)$$

برای کره: $\phi_s = 1$

10-2- رابطه افت فشار با سرعت

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{150\mu(1-\varepsilon)^2 V}{\varepsilon^3 d_p^2} \quad : \text{جریان آرام سیال}$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{1/75(1-\varepsilon)\rho V^2}{\varepsilon^3 d_p} \quad : \text{جریان درهم سیال}$$

در بستر سیال شده:

$$\frac{\Delta P}{L_{mf}} = (1-\varepsilon_{mf})(\rho_p - \rho)g \qquad (8)$$

ε_{mf} : تخلخل در شروع سیال شدن

L : طول بستر در شروع سیال شدن